

Exercice n°1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $R = (o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 1, 1)$, $B(0, 1, -1)$ et $C(-1, 0, 1)$ et le plan $P : x - z + 3 = 0$.

- 1) a) Montrer que les points O , A et B déterminent un plan Q
b) Donner une équation cartésienne du plan Q
- 2) Montrer que les plans P et $P' : 2x - y - z = 0$ sont sécants selon une droite Δ dont on déterminera une représentation paramétrique.
- 3) a) Caractériser l'ensemble S d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$
b) Montrer que $S \cap P'$ est un cercle dont on précisera le centre ω et le rayon r .

Exercice n°2

- 1) Etudier les variations de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1+x^2}{3+x^2}$
- 2) Soit $h(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$
a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} une unique solution x_0 .
b) Vérifier que $1/3 < x_0 < 1$.
c) Etudier le signe de $h(x)$.
- 3) On considère la suite U définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
a) Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} ; $0 < U_n < x_0$
b) Etudier la monotonie de la suite (U_n)
c) Montrer que la suite (U_n) est convergente vers x_0 .

Exercice n°3

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$.

- I) 1) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) a) Montrer que (C_f) admet deux asymptotes obliques d'équations respectives :
 $\Delta : y = x$ et $\Delta' : y = x + 1$
b) Montrer que $\omega(0; 1/2)$ est un centre de symétrie de (C_f) .
- 3) Soit g la restriction de f sur $]0, +\infty[$
a) Montrer que g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} .
b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$, admet une unique solution α et que :
 $\text{Log}2 < \alpha < 1$
c) Montrer que $f'(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2$
d) Ecrire une équation de la tangente T à (C_f) au point d'abscisse α
e) Tracer T , Δ , Δ' et (C_f) dans un repère orthonormé $R = (o, \vec{i}, \vec{j})$. (on prend $\alpha = 0.8$)

II) On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g et (C') sa courbe représentative dans le repère R .

- 1) Montrer que g^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $(g^{-1})'(0)$ en fonction de α .
- 2) La courbe (C') coupe (xx') en un point I , écrire la tangente T' à (C') en I .
- 3) Tracer (C') et T' dans le même repère R .